Espaço de Hilbert

O espaço de Hilbert é um tipo especial de espaço vetorial. O espaço de Hilbert apresenta todas as propriedades de um espaço vetorial ordinário com mais algumas propriedades características. Matematicamente, definimos o espaço de Hilbert como sendo um espaço vetorial completo ("sem buracos") com ***produto interno*** e ***norma*** induzida pelo produto interno.

Alguns autores ainda exigem que o espaço de Hilbert ($\mathcal{H}$) deva ser ***separável***. Um conjunto é separável se possui um ***subconjunto enumerável*** (contável) e ***denso***. Um conjunto A é contável ou enumerável se existir uma função f ***injetora*** do conjunto A a algum subconjunto dos $\mathbb{N} = \{0,1,2,3,\cdots\}$. Se além disso, a função f for ***sobrejetora***, portanto ***bijetora***, já que é injetora, então o conjunto A é um conjunto ***contável e infinito***, ou seja, tem a mesma ***cardinalidade*** dos $\mathbb{N}$. Por outro lado, dizemos que um conjunto A é denso em um conjunto M, digamos, se $\bar{A} = M$, onde $\bar{A}$ denota o ***fecho*** de A, isto é, o conjunto de todos os ***pontos aderentes*** de A.

Dissemos, ainda, que o espaço de Hilbert é completo. Isto quer dizer que toda ***sequência de Cauchy*** é convergente. Uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy se, e somente se, $\forall\varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $m, n \geq n_0 \Longrightarrow |a_m - a_n| < \varepsilon$. Portanto, em uma sequência de Cauchy, a distância entre dois termos consecutivos aproxima-se de zero no limite em que m e n tende para infinito.

Os espaços de Hilbert podem ser de dimensões *finitas ou infinitas*. Como exemplos de espaços de Hilbert de dimensão finita podemos citar $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$ etc. como exemplo de espaços de Hilbert de dimensão infinita, podemos citar o espaço das funções com valores complexos quadraticamente integrável (L). Neste caso, podemos definir o produto interno por

$$\langle \varphi(x), \phi(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi^*(x)\phi\,(x)dx \to finito.$$

Em mecânica quântica, exigimos que a integral seja finita para que a função de onda seja normalizável. Daí a restrição de que as funções sejam quatraticamente integráveis. Por exemplo, o produto interno

$$\langle e^x, e^{2x} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^x e^{2x}\,dx \to infinita.$$

Portanto, não poderíamos usar essas funções na mecânica quântica, pois o produto interno não existe.