GRUPO

Um ***grupo G*** é um conjunto não vazio de objetos que munido de uma operação binária $\divideontimes = G \times G \to G$ satisfaz os seguintes axiomas (axiomas de grupo):

1) Fechamento: $\forall x, y \in G \to x \divideontimes y \in G$
2) Associatividade: $\forall x, y, z \in G \to x \divideontimes (y \divideontimes z) = (x \divideontimes y) \divideontimes z$
3) Elemento neutro: $\forall x \in G \to \exists \xi \in G\ tal\ que\ x\ \divideontimes \xi = \xi \divideontimes x = x$
4) Elemento inverso: $\forall x \in G \to \exists y \in G\ tal\ que\ x \divideontimes y = y \divideontimes x = \xi$
5) Comutatividade: $\forall x, y \in G \to x \divideontimes y = y \divideontimes x$

Nos axiomas listados acima, denotamos o elemento neutro pelo símbolo ξ. Se o conjunto de objetos apresentar os 5 axiomas definidos anteriormente, o conjunto é chamado de ***grupo abeliano***. Se, no entanto, o conjunto G só apresentar os 4 primeiros axiomas, o conjunto é chamado simplesmente de ***grupo***.

Exemplos de grupos:

1. $(\mathbb{R}, +)$ é um grupo abeliano;
2. $(\mathbb{R}, -)$ é grupo abeliano;
3. $(\mathbb{R} - 0, \cdot)$ é grupo abeliano;
4. $(M_2(\mathbb{R}), +)$ matrizes 2×2 com entradas reais e com a operação de adição é grupo abeliano;
5. $(\mathbb{Z}, +)$ é grupo sob a operação de adição;
6. $(\mathbb{C}, +)$ é grupo sob a operação de adição;
7. $(\mathbb{p}_n, +)$ onde $\mathbb{p}_n$ representa o conjunto dos polinômios de grau menor ou igual a n.

CORPO OU FIELD

Em matemática, um ***corpo*** ou ***field*** é um conjunto de objetos que é grupo ***abeliano*** em relação às operações de ***adição*** e ***multiplicação*** e, além disso, apresenta o chamado ***axioma da distributividade,*** ou seja,

1) Grupo abeliano em relação à operação de adição $(+)$:
    a. Fechamento: $\forall x, y \in G \to x + y \in G$
    b. Associatividade: $\forall x, y, z \in G \to x + (y + z) = (x + y) + z$
    c. Elemento neutro: $\forall x \in G \to \exists \xi \in G\ /\ x\ + \xi = \xi + x = x$

d. Elemento inverso: $\forall x \in G \rightarrow \exists y \in G \,/\, x + y = y + x = \xi$

e. Comutatividade: $\forall x, y \in G \rightarrow x + y = y + x$

2) Grupo abeliano em relação à operação de multiplicação:

a. Fechamento: $\forall x, y \in G \rightarrow x \cdot y \in G$

b. Associatividade: $\forall x, y, z \in G \rightarrow x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

c. Elemento neutro: $\forall x \in G \rightarrow \exists \xi \in G \,/\, x \cdot \xi = \xi \cdot x = x$

d. Elemento inverso: $\forall x \in G \rightarrow \exists y \neq 0 \in G \,/\, x \cdot y = y \cdot x = \xi$

e. Comutatividade: $\forall x, y \in G \rightarrow x \cdot y = y \cdot x$

3) Axioma da distributividade

a. $\forall x, y, z \in K \rightarrow x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

Os elementos do corpo K são chamados de escalares.

Exemplos:

1. números reais: $\mathbb{R}$;
2. números complexos: $\mathbb{C}$;
3. números racionais: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \middle| \, a \in \mathbb{Z} \; e \; b \in \mathbb{Z}^* \right\}$.

ESPAÇO VETORIAL LINEAR

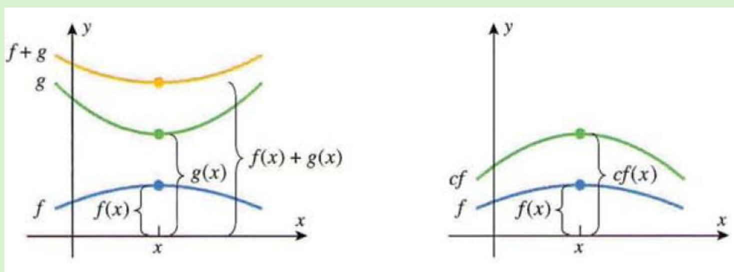
O espaço vetorial linear E sobre um corpo K é definido como sendo um conjunto de elementos pertencentes ao conjunto E que formam um ***grupo abeliano*** em relação à operação de adição e que, além disso, obedecem aos seguintes postulados adicionais:

1) $\forall \alpha \in K$ e $\forall \boldsymbol{x} \in E \Longrightarrow \alpha \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} \alpha \in E$ (fechamento)
2) $\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall \boldsymbol{x} \in E \rightarrow \alpha(\beta \boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x}$
3) $\forall \alpha \in K$ e $\forall \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in E \rightarrow \alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}$
4) $\forall \alpha, \beta \in K$ e $\forall \boldsymbol{x} \in E \rightarrow (\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{x}$
5) $\exists 1 \in K \,/\, \forall \boldsymbol{x} \in E \rightarrow 1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}1 = \boldsymbol{x}$

Os elementos do corpo K são denotados aqui pelas gregas α, β, γ etc. Os elementos do espaço vetorial E são escritos em negritos ou uma flechinha sobre a letra que o representa. os elementos do espaço vetorial são chamados de *vetores*. O símbolo 1 representa aqui o elemento neutro do corpo *K*.

Exercícios

1) Mostre que o conjunto dos vetores flechas sobre o corpo dos reais é um espaço vetorial.
2) Mostre que o conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \ / \ y = 2x\}$ sobre o corpo dos reais é um espaço vetorial.
3) O conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R} \ / \ y = 2x + 2\}$ é um espaço vetorial? Justifique sua resposta.
4) Mostre que o conjunto dos polinômios de coeficientes reais de grau menor ou igual a 3 é um espaço vetorial sobre o corpo real. Em caso afirmativo, qual é a dimensão desse espaço vetorial? Explicite um conjunto de base para esse espaço vetorial.
5) O conjunto dos números complexos, $\mathbb{C}$, com as operações usuais é um espaço vetorial sobre ele mesmo, mas é também um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$.
6) Seja o conjunto das funções com valores reais. Dizemos que duas funções f e g são iguais, se, e somente se, $f(x) = g(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$. Definimos o produto de um escalar por uma função real e a soma de duas funções reais por
$$(cf)(x) = cf(x) \ \ e \ \ (f + g)(x) = f(x) + g(x).$$
Geometricamente, o gráfico de $(f + g)(x)$ é obtido somando as coordenadas y de $f(x)$ e $g(x)$ para todo x e o gráfico do produto pelo escalar c é obtido multiplicando o valor de $f(x)$ por c para todo x.



Mostre que o conjunto das funções com valores reais no intervalo $(-\infty, \infty)$ e com as operações de multiplicação por escalar e soma definidas acima é um espaço vetorial.

7) O conjunto das matrizes quadradas de ordem 2x2 é um espaço vetorial?

Uma notação bastante usada na mecânica quântica é a notação introduzida por *Paul Andrew Murray Dirac* em 1932, que é a notação *ket*: $|a\rangle$. A notação *ket* é extremamente útil na obtenção de resultados na mecânica quântica e foi inspirada na definição de *produto interno* que veremos logo adiante.

A *dimensão* de um espaço vetorial *E* é igual a cardinalidade do conjunto de vetores da sua base, ou seja, é igual ao número de elementos do conjunto de base. Uma base de um espaço vetorial é um conjunto de vetores *linearmente independentes* (L.I.) e que seja capaz de gerar o espaço vetorial, ou seja, qualquer vetor do espaço vetorial pode ser representado como combinação linear dos vetores da base. Neste caso, dizemos que a base é *completa*. Por exemplo, considere o conjunto de vetores da base canônica do $\mathbb{R}^3$: $\{e_1, e_2, e_3\}$. Então, podemos representar o vetor genérico $\boldsymbol{a}$ como

$$\boldsymbol{a} = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\\gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}.$$

Os escalares α, β e γ (elementos do corpo R) representam as projeções do vetor $\boldsymbol{a}$ nos vetores da base e_1, e_2 e e_3 que é a representação do vetor $\boldsymbol{a}$ nessa base. Portanto, *a representação de um vetor depende da base escolhida*.

Um conjunto de *n* vetores $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ é dito ser linearmente independente se a única solução não trivial possível para a equação

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n = 0$$

for $c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_n = 0$. É claro que a solução trivial $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \cdots = \mathbf{v}_n = 0$ também satisfaz a equação. Mas, esta solução não nos interessa. Isso significa que nenhum vetor do conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ pode ser representado pela combinação linear dos demais. Por outro lado, qualquer vetor do $\mathbb{R}^n$ pode ser representado como combinação linear dos vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n$. Observe que a base de um espaço vetorial não é única. Mas, uma vez escolhida a base a representação do vetor na base escolhida *é única*. De fato, suponha que o vetor $\mathbf{v}$ tenha duas representações diferentes com os mesmos vetores da base *n*-dimensional:

$$\mathbf{v} = c_1e_1 + c_2e_2 + c_3e_3 + \cdots + c_ne_n \text{ e } \mathbf{v} = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + \cdots + a_ne_n.$$

Subtraindo a segunda equação da primeira, obtemos

$$\mathbf{0} = (c_1 - a_1)e_1 + (c_2 - a_2)e_2 + (c_3 - a_3)e_3 + \cdots + (c_n - a_n)e_n$$

Como os vetores são L.I., concluímos que $c_1 = a_1$, $c_2 = a_2$, $\cdots$, $c_n = a_n$ e, portanto, *a representação é única*.

Exercícios

1) O conjunto de vetores $\{(1{,}0{,}1), (2{,}0{,}0)\}$ é base do $\mathbb{R}^3$?
2) O conjunto de vetores $\{(1{,}1), (0{,}1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$?
3) O conjunto de vetores $\{(1{,}0), (0{,}1), (2{,}1)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$?
4) Encontre uma base para o conjunto de matrizes simétricas de ordem 2x2 com entradas reais.

PRODUTO INTERNO

Dado um espaço vetorial *E* sobre um corpo *K*, o produto interno é uma função com uma operação binária que atuando em dois vetores do espaço *E* retorna um escalar, ou seja,

$$\langle *,* \rangle : E \times E \longrightarrow K$$
$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \longrightarrow \alpha$$

de tal modo que dados quaisquer três vetores $\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in E$ e $\forall \alpha, \beta \in K$, valem os seguintes axiomas:

i) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle \geq 0$ e $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 0$ ········· *Positivo definido*;

ii) $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle = (\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle)^* = \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} \rangle^*$ ·········· S*imétrico conjugado ou simétrico hermitiano*;

iii) $\langle \boldsymbol{a}, \alpha \boldsymbol{b} + \beta \boldsymbol{c} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \beta \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$ ···········*Linear na segunda componente*;

iv) $\langle \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle = \alpha^* \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \beta^* \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c} \rangle$ ·········· *Antilinear ou linear conjugado na primeira componente.*

Estes axiomas foram definidos de acordo com a convenção da física. Em matemática, a linearidade é geralmente definida na primeira componente. Se o espaço vetorial possui produto interno, ele é chamado de *espaço vetorial com produto interno* ou *espaço de Hausdorff* ou *espaço pré-Hilbert*. O produto escalar definido no $\mathbb{R}^3$ é um produto interno. Expressando os vetores ***a*** e ***b*** na base canônica do $\mathbb{R}^3$: $\{e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0), e_3 = (0,0,1)\}$, temos que

$$\boldsymbol{a} = a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 \text{ e } \boldsymbol{b} = b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3.$$

Observe que

$$e_i \cdot e_j = |e_i||e_j| cos\theta = 1 \cdot 1 \cdot cos\theta = cos\theta = \begin{cases} 1 \ \ se \ \theta = 0 \\ 0 \ \ se \ \theta = \pi/2 \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} &= (a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3) \cdot (b_1 e_1 + b_2 e_2 + b_3 e_3) = \sum_{i,j=1}^{3} a_i e_i \cdot b_j e_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j (e_i \cdot e_j) = \sum_{i,j=1}^{3} a_i b_j \delta_{ij} = \sum_{i=1}^{3} a_i b_i. \end{aligned} \tag{1}$$

Em (1), definimos uma nova entidade chamada ***delta de Kronecker*** $\boldsymbol{\delta_{ij}}$ que é definida como

$$\delta_{ij} \equiv \begin{cases} 1 \ se \ i = j \\ 0 \ se \ i \neq j \end{cases}$$

O conjunto de vetores $\{e_1, e_2, e_3\}$ forma uma base ortonormal no $\mathbb{R}^3$. Essa ideia pode ser estendida, de modo similar, para o $\mathbb{R}^n$.

Para o caso de um *espaço vetorial complexo* de dimensão *n*, é mais fácil trabalharmos com a notação de Dirac. Em analogia com o conjunto de bases $\{e_1, e_2, e_3\}$ no $\mathbb{R}^3$, vamos definir no $\mathbb{C}^n$ o conjunto de vetores *kets* ou simplesmente *kets*: $|i\rangle$ com $i = 1,2,3, \cdots, n$. Vamos assumir que esta base é completa, ou seja, qualquer vetor ket $|a\rangle$ pode ser representado como combinação linear da base $|i\rangle$:

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle a_i. \tag{2}$$

Nessa base, qualquer vetor ***a*** fica completamente determinado pela matriz coluna formada pelos coeficientes a_i da expansão de $|a\rangle$ na base $|i\rangle$:

$$|a\rangle = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

Dado o espaço vetorial *E*, podemos definir o espaço *vetorial dual* de *E* de tal modo que a cada vetor ket $|a\rangle$ corresponda, biunivocamente, a um vetor $\langle a|$ que vamos chamá-lo de *Bra*. Geralmente, denotamos o espaço vetorial dual por *E**. O vetor bra é obtido fazendo o transposto conjugado do vetor ket. Portanto, o vetor abstrato bra é um vetor linha em que todas as suas entradas da representação matricial foram tomadas o complexo conjugado, ou seja,

$$\boldsymbol{a}^\dagger = (a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*).$$

O símbolo † (*adaga*) significa que foi tomado o transposto conjugado de $\boldsymbol{a}$**.** Na notação *braket*, o produto interno do vetor ***a*** com o vetor ***b*** é dado por

$$\langle a||b\rangle = \langle a|b\rangle = \boldsymbol{a}^\dagger \boldsymbol{b} = (a_1^*, a_2^*, \cdots, a_n^*) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1^* b_1 + a_2^* b_2 + \cdots + a_n^* b_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i$$

Note que

$$\langle a|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* a_i = \sum_{i=1}^{n} |a_i|^2$$

é sempre uma quantidade real e positiva e corresponde ao *quadrado do módulo do vetor **a***:

$$|\boldsymbol{a}|^2 = \langle a|a\rangle.$$

Como o espaço dual E é um espaço vetorial, é natural definirmos uma base *bra* $\{\langle i|\}$ de tal modo que qualquer vetor bra possa ser expresso como combinação linear dos vetores da base bra, ou seja,

$$\langle a| = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \langle i|. \tag{3}$$

O produto interno $\langle a|b\rangle$ pode, agora, ser escrito como

$$\langle a|b\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^* \langle i|\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j |j\rangle\right) = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^* \langle i|j\rangle b_j.$$

Para que este produto interno fique equivalente à definição (1), devemos ter

$$\langle i|j\rangle = \delta_{ij}$$

ou seja,

$$\langle a|b\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^* \langle i|j\rangle b_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_i^* \delta_{ij} b_j = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i.$$

Em resumo, podemos dizer que o vetor ket $|a\rangle$ é representado por uma matriz coluna $\boldsymbol{a}$. e o vetor bra $\langle a|$ é representado por uma matriz linha $\boldsymbol{a}^\dagger$, e o produto interno é exatamente o produto das matrizes das suas representações. Para determinarmos a *j*-ésima componente do vetor $|a\rangle$, multiplicamos à esquerda pelo vetor $\langle j|$ da base bra:

$$\langle j|a\rangle = \langle j|\left(\sum_{i=1}^{n} a_i |i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} \langle j|i\rangle a_i = \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij} a_i = a_j \tag{4}$$

e

$$\langle a|j\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^* \langle i|\right)|j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \langle i|j\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \delta_{ij} = a_j^*. \tag{5}$$

Usando (4) e (5) em (2) e (3), obtemos

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|a\rangle = \left(\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\right)|a\rangle. \tag{6}$$

$$\langle a| = \sum_{i=1}^{n} a_i^* \langle i| = \sum_{i=1}^{n} \langle a|i\rangle\langle i| = \langle a|\left(\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i|\right). \tag{7}$$

Estes resultados sugerem que devemos ter

$$\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| = \mathbb{1} \tag{8}$$

Esta entidade é muito importante na derivação de muitas relações e é chamada de *relação de completeza* ou *relação de fechamento*, pois ela nos diz que os vetores da base formam um conjunto completo. Na verdade, (8) representa uma matriz identidade ou operador identidade. No caso particular de três dimensões, com os vetores canônicos $\{(1\ 0\ 0), (0\ 1\ 0), (0\ 0\ 1)\}$ temos:

$$\sum_{i=1}^{n} |i\rangle\langle i| = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}(1\ 0\ 0) + \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}(0\ 1\ 0) + \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}(0\ 0\ 1) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Norma

Seja E um espaço vetorial sobre um compor K real ou complexo. Definiremos a norma de E como sendo uma função

$$\|\cdot\|: E \to \mathbb{R}^+$$

que obedece aos seguintes axiomas:

i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{v}\| = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} = 0,\ \ \forall \mathbf{v} \in E$

ii) $\|\alpha\mathbf{v}\| = |\alpha|\|\mathbf{v}\|,\ \ \forall \mathbf{v} \in E$ e $\alpha \in K$

iii) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|,\ \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in E$ (desigualdade triangular)

Portanto, a norma toma um vetor do espaço vetorial e o associa a um escalar positivo ($\mathbb{R}^+$). O conceito de norma está associado, intuitivamente, à noção de distância geométrica entre dois vetores. Nem todo espaço vetorial possui norma. Mas, se o espaço vetorial apresentar norma, então ele será chamado de ***espaço vetorial normado***, e será denotado por $(E, \|\cdot\|)$. Se o espaço vetorial apresentar produto interno, então podemos ter a norma induzida pelo produto interno. Seja, por exemplo, o produto interno (ou escalar) dos vetores **v** e **w** definido por

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{w}\| cos\theta.$$

Agora, se $\mathbf{v} = \mathbf{w}$, então temos que $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \|\mathbf{v}\|\|\mathbf{v}\| cos 0$, ou seja, $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$. Portanto, se o espaço vetorial tiver produto interno, então sempre teremos a norma dada por

$$\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle},\quad \forall \mathbf{v} \in E.$$